

« Enseigner et construire le concept de nombre au travers du calcul mental »

Viarmes. mercredi 9 mai 2012

Conférence Cycle 2. Agnès Batton.

Vidéos d'introduction : (des exemples d'adultes en situation de calcul mental ou de restitution des tables)
montrer que le calcul mental est une activité qui n'est pas toujours sereine !

I. Un peu d'histoire du calcul : quelques pistes de réflexion

- avant le nombre, la mémoire de la quantité : correspondance terme à terme : une entaille pour une unité ;
- Calcul vient du latin calculus: caillou
- les parties du corps, les mains (base 10) , les phalanges (base 12 ?) furent les premiers supports de « calcul »,
- la numération égyptienne est une numération en base qui peut servir en comparaison de la notre pour faire émerger les propriétés
- le système décimal de position favorise les calculs écrits.



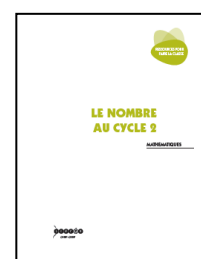
II. Les calculs à l'école primaire

-programmes 2008

- documents d'application : cycle2 et cycle 3

- articles des documents d'accompagnement aux programmes de 2002: « le calcul mental à l'école élémentaire », « le calcul posé à l'école élémentaire », « utiliser les calculatrices en classe ».

Brochure du MEN : nombre au cycle 2, article de P. Masselot, Butlen



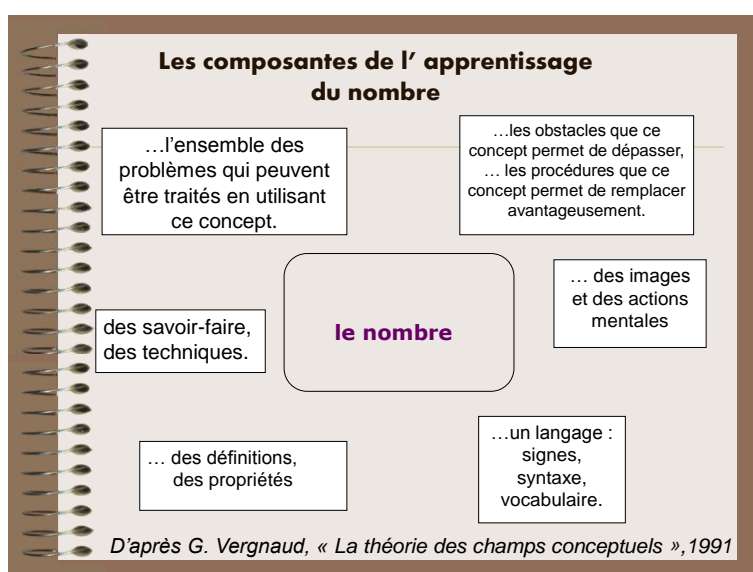
Mise au point de vocabulaire :

- Collection : ensemble d'objets
- Configuration : ensemble organisé d'objets matériels ou dessinés (collection organisée)
- Constellation : collection organisée de façon conventionnelle
exemples : les constellations du dé, les constellations des cartes à jouer

Chiffre : « le chiffre est au nombre ce que la lettre est au mot »
symbole qui sert à écrire les nombres

- Le nombre du point de vue de son apprentissage :

Diapo A Batton, E Boisson d'après G Vergnaud



Quatre grandes classes d'usage mathématique des nombres entiers

	Cardinal: pour exprimer des quantités	ordinal
Mémoriser	pour garder la mémoire d'une quantité en vue de la reproduire, de la communiquer, de la compléter, de la comparer à une autre quantité	pour garder la mémoire d'une position en vue de la retrouver, de la communiquer
Anticiper le résultat d'une action	pour connaître à l'avance le résultat d'une augmentation, d'une diminution, d'un partage ou pour retrouver une quantité avant qu'elle ne subisse une transformation (calculs)	pour connaître, à l'avance, le résultat d'un déplacement (en avant ou en arrière) dans une liste d'objets rangés ou pour retrouver la position d'un objet avant qu'il ne subisse un déplacement

R. Charnay et M. Mantes, 2005

Dénombrement / comptage :

Dénombrer une collection d'objets : plusieurs acceptions chez les didacticiens

- Ermel : dénombrer c'est trouver le nombre d'éléments de la collection en utilisant la comptine numérique
- Stella Baruck : « Nombres » veut dire « savoir combien il y a sans avoir à dénombrer, qui veut dire compter ». (voir *Comptes pour petits et grands Vol 1*, éd. Magnard)
- **Dominique Valentin**: « **Dénombrer** » désigne une procédure, quelle qu'elle soit, qui permet de déterminer le nombre d'éléments d'une collection.
- **Rémi Brissiaud** : on appelle « dénombrement » tout procédé (les psychologues disent toute « procédure ») permettant d'accéder au nombre d'éléments d'une collection

Ces deux dernières définitions et l'étymologie des mots me font choisir d'utiliser:

- **dénombrer (même principe que dénommer) c'est trouver le nombre d'éléments d'une collection quelque soit la procédure choisie ;**
- **compter c'est trouver le nombre d'éléments d'une collection en utilisant la comptine**

Pour dénombrer , plusieurs procédures :

- reconnaissance globale des quantités :
jusqu'à 3 subitizing
de 1 à 6 constellations du dé
de 1 à 10 constellations des doigts (kinesthésique et visuel)
- Groupement et usage des décompositions
- Comptage un à un

D'autres procédures proches du comptage :

- surcomptage (comptage sur les doigts), - décomptage (comptage décroissant)

qui ne correspondent pas à du calcul !

Calcul :

« Le **calcul** se définit par opposition au **comptage**.

Calculer, c'est mettre en relation des quantités directement à partir de leurs représentations numériques, sans passer par la réalisation physique d'une ou plusieurs collections dont les éléments seraient dénombrés. »

voir R. Brissiaud dans Comment les enfants apprennent à calculer, éd Retz

« **calculer** » : travail sur les nombres (son écriture et pas sur ses représentations figuratives) et non sur les objets ; ce terme s'oppose ainsi aux termes « dénombrer » ou « compter » qui ne peut se faire que sur les objets, qu'ils soient effectivement présents ou évoqués. »

voir D. Valentin

Avec une distinction vue plus tard sur le « calcul figuratif »

(cf. R Brissiaud *Premiers pas vers les maths*, éd. Retz)



Si les boîtes sont transparentes :
l'élève peut dénombrer.

Des boîtes opaques incitent au
calcul.

Optimaths CP

Les décompositions-recompositions sont fondamentales pour tout calcul !

Un exemple de préparation au calcul : du « calcul-sur-les-objets » :

(voir R. Brissiaud, *Comment les enfants apprennent à calculer*, Retz)

travail de décomposition et recombinaison à faire tôt : ex décomposition du 3 dès la PS :
« Montrer 3 avec ses doigts » de plusieurs manières et notamment à deux mains !!

D'autres exemples :

4 + 3 avec les doigts : directement visuellement sans calcul, en surcomptant : « 4, 5, 6, 7 »
en « calcul figuratif » avec sa propre collection de doigts (collection intermédiaire) en effectuant une bascule d'un doigt d'une main à l'autre : 4 et 3 c'est 4 et 1, 5 ; 5 et 2 font 7.

Mais «à un moment, il faut lâcher les doigts ».

Les procédures fondamentales :

passage du 5 (nombre inf. à 5); retour au 5 (nombres sup. à 5);

passage de la dizaine ;

usage des doubles, exemple : 7 + 8 est un « presque double » ...

Pas de procédure à privilégier de façon absolue :

chaque procédure est un choix de l'élève qui s'adapte aux nombres avec lesquels il doit travailler :
chacune des procédures dépend de la connaissance qu'a l'élève des nombres et des opérations en jeu

Une activité essentielle consiste à faire expliciter par les élèves leur procédure de manière à ce que chacun prenne conscience de sa propre procédure et que tous découvrent la diversité des procédures !

Exemple des sourds qui calculent avec les doigts par visualisation des 10 par les deux mains
(voir thèse de R Brissiaud)

Tableau de classification des différents calculs :

adaptation du document d'accompagnement par la COPIRELEM

Classification des différents calculs		
DOCUMENTS D'ACCOMPAGNEMENT	<input type="checkbox"/> Calcul automatisé Résultats mémorisés Procédures automatisées	<input type="checkbox"/> Calcul réfléchi Procédures élaborées, raisonnées
➤ Calcul mental	calcul dont le résultat est immédiatement disponible	calcul s'appuyant sur une stratégie ne nécessitant pas ou peu d'écrit
➤ Calcul écrit	opération posée en colonnes	calcul en ligne s'appuyant sur une stratégie , nécessitant une mémoire des étapes successives
➤ Calcul instrumenté	calcul pris entièrement en charge par la calculatrice	calcul s'appuyant sur une stratégie dont certaines parties sont obtenus à la calculatrice

Il est possible d'alléger le travail de mémorisation pour faciliter l'accès au calcul mental . Exemple, écrire l'opération proposée en ligne au tableau ou chacun sur sa feuille ou son ardoise (par ex. 20×5) : une trace écrite d'un calcul en ligne peut permettre aux élèves d'entrer dans la procédure qui elle sera mentale (attention, cela induit une représentation du nombre qui peut orienter le choix de la procédure...).

➔ Cela peut être un moyen de différenciation

Calcul écrit :

- Pour une opération posée en colonnes :
on est alors sur du calcul automatisé car il s'agit de suivre un algorithme précis, colonne après colonne (« calcul sur les chiffres et non sur les nombres » voir F. Boule).
- Pour une opération écrite en **ligne** : il est alors nécessaire de mettre en place des stratégies, de faire des choix (**calcul réfléchi**)

➔ Pour les tables d'addition

les premiers résultats se mémorisent par image et/ou (puis) verbalement (par cœur) (ex. $2+3$) mais au-delà de 10, c'est souvent la reconstruction qui est automatisée, avant que le résultat ne soit mémorisé !

Pour les tables de multiplication, on est plus dans de la restitution verbale.

Pour faciliter la mémorisation des résultats de la table d'addition :

- Repérer les doubles, les presque doubles, les compléments à 10, la numération
- Repérer la symétrie de la table : la commutativité de l'addition

III. Propriétés et connaissances mobilisées

Exemple : $18 + 36 + 12 = (18 + 12) + 36 = 30 + 36 = 66$: Commutativité & associativité

Chercher dans l'écriture des indices pour choisir comment s'y prendre (ici 12 et 18 se complètent bien (8 et 2 se complètent pour faire 10 dans les unités)

- ➔ Accompagner les élèves : savoir « perdre » du temps pour en « gagner » plus tard, en calcul mental, il n'y a pas UNE procédure comme pour l'opération posée... elles dépendent des connaissances des élèves sur les nombres et les opérations données.

Ex. jeu de calcul mental sur les compléments à 60 avant le travail sur l'heure (article de Fabienne LE QUELLEC (PE2), dans *Les maths sans bosse à l'école.*, éd. CRDP de Créteil)

Les calculs automatisés ne s'arrêtent pas aux tables d'addition et de multiplication !

- ajouter ou retrancher entre elles les dizaines, des centaines, des milliers ; calculer les compléments correspondants ;
- calculer **les compléments** à 100 et à la centaine supérieure pour des nombres entiers dont les chiffres des unités est 0
(compléments : notion à travailler depuis la PS (jeu du « godet » ou du « gobelet » : 3 objets sont visibles au début, j'en cache, je n'en vois plus qu'un, combien y en a-t-il de cachés ?).

Il serait intéressant que l'usage d'encadrements, d'ordres de grandeurs pour prévoir un résultat soit systématisé : avant de faire mon calcul, je peux savoir que le résultat sera entre tel et tel nombre (par exemple entre deux dizaines pleines consécutives), qu'il vaut à peu près ...

« *le calcul mental est un calcul sur les nombres plutôt que sur les chiffres* » F. Boule thèse 1997

IV. Calcul mental: quelle place, quels enjeux ?

- ➔ Une bonne maîtrise du calcul mental est indispensable pour les besoins de la vie quotidienne
- ➔ Une bonne maîtrise du calcul permet de mettre en place des moyens efficaces pour obtenir un résultat exact, un résultat approché, un ordre de grandeur.
- ➔ Une bonne maîtrise du calcul permet de mettre en place des moyens de contrôle efficaces

Trois types d'objectifs :

- l'automatisation de calculs simples
- la diversification des stratégies de calcul
- une première maîtrise du calcul approché (à intensifier pour donner du sens au nombre)

« entraînement quotidien » : nécessité de réactivation régulière

- ➔ Construire et renforcer des connaissances arithmétiques sur les nombres entiers
- ➔ Approcher (en situation) certaines propriétés des opérations

- ➔ Aborder avec une meilleure compréhension les notions de proportionnalité et de fractions ;
- ➔ L'exploitation des procédures mises en œuvre permet de mettre l'accent sur les raisonnements mobilisés et sur les propriétés des nombres et des opérations utilisées en acte
- ➔ Renforcer la fiabilité du calcul posé
- ➔ Une bonne maîtrise du calcul mental est une aide à la résolution de problème

Mémorisation et entraînement ne suffisent pas !

Sont également indispensables :

- une bonne représentation mentale des nombres ;
- la compréhension des opérations en jeu ;
- l'élaboration progressive des résultats

Matériel de numération permettant un échange physique pouvant servir à la compréhension et donc outil d'étayage possible:

Cubes à emboîter :

le souci est que ce matériel ne donne pas de limite lors de la construction de groupes de 10 (parfois les élèves continuent à emboîter jusqu'à ce qu'ils n'aient plus de cubes...), mais qui a l'avantage d'être sécable



Boîtes de Picbille : une aide à la construction de l'image mentale avec décomposition de 10 en deux groupes de 5 (les remiers nombres en référence à 5 et à 10)



temps 1 : la baguette en face de l'élève (vision directe)

temps 2 : on retourne la boîte qui est maintenant face à l'enseignant qui dit « imaginez ce que je vois » : le phénomène en fonctionnement est alors la « *construction de l'image mentale par la vision d'autrui* » (cf R Brissiaud)

Cubes unités, buchettes, plaques, cubes centaines : matériel non sécable mais qui permet des échanges



Décicub (médaille d'argent concours Lépine 2011) : sécable sans l'être, les barres sont des barres de 10 ou de 20 mais qui peuvent s'articuler

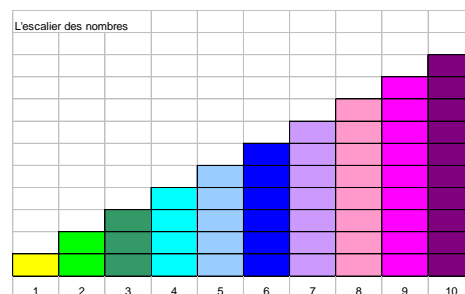


Autres outils possibles en début de cycle 2 :

L'« escalier des nombres » : une frise numérique exemplifiée :
il a l'avantage de montrer la quantité correspondante au nombre
indiqué , on peut avoir une :

- lecture horizontale et verticale
- vision physique du + 1 (le lien de succession : 7 c'est 6 + 1)
- vision du complément à 10.

(adaptée de *Apprendre à calculer avec les réglettes brissiaud*, Retz 1989)



Cartes à points (voir Jean-Louis Brégeon, Mille-Maths CP)

construites sur une représentation en doubles de points : lecture verticale et horizontale ; exemple 5 : c'est 2 et 2 et 1 ou 3 et 2, visualisation du complément à 10



voir aussi Picbille comme Perrine  

Pour rendre plus disponibles les résultats on peut diversifier les représentations et les situations !!

Diversité des procédures

- Objectif : être capable d'élaborer une procédure adaptée au calcul proposé
- Importance de l'explicitation et de la confrontation des procédures possibles et efficaces
- Privilégier l'énoncé oral des calculs à effectuer mais ne pas s'interdire le support de l'écrit pour éviter la saturation de la mémoire de travail

Quand et comment ?

- Dans toute activité (ex tableaux, en EPS : chronos pour travailler l'estimation, les doubles,...)
- Lors de moments spécifiques quotidiens (ex : temps de reconstitution de tables, contrôle de mémorisation, ...) mais pas seulement en évaluation (nécessité du moment de construction) !

Pour l'entretien et le contrôle de la mémorisation : séances brèves (5 à 10 mn) en utilisant le principe de Lamartinière par ex.

Pour le calcul réfléchi : laisser le temps de la réflexion et de l'élaboration (15 à 20mn)

Dans les programmes l'estimation mentale d'un ordre de grandeur intervient en CM1 mais cela est trop tardif : il faut donc travailler l'encadrement, l'ordre de grandeur avant.

V. Et les jeux

Objectifs d'apprentissage numériques pour le cycle 2:

- En calcul automatisé: les tables d'additions; les différences et les compléments associés; les doubles et les moitiés; les tables de multiplication de 2, 3, 4, 5, 10...

- En calcul réfléchi: tous les calculs automatisés sont d'abord traités par le calcul réfléchi; approcher la division de deux entiers par des problèmes de partage

Les intérêts du jeu :

- Plaisir de l'activité pratiquée
- Pleine adhésion des élèves y participant

Il permet de :

faire semblant, prendre des décisions permettant les initiatives (choix), respecter des règles

Des caractéristiques du jeu (qui peuvent emporter l'adhésion des élèves ou représenter un frein) :

- incertitude quant au résultat (hasard, compétition),
- activité « frivole », protégée du risque (présence du M)

Le jeu est moins présent en cycle 2 et 3 du fait de « l'incertitude », du caractère « frivole » de l'activité qui impose un changement de posture de l'enseignant . Il y a pourtant de quoi faire sur les apprentissages du cycle 3 ...

Il est souvent « réservé » à certains moments (fin de travail, récréation...) faute de temps. .. souvent conservé pour l'AP mais son introduction sur d'autres temps est à réfléchir...

Des activités de calcul en rituel (jeux de doigts)

- Lucky Luke (représentations et décompositions) : ex : 3 de façons différentes avec les mains et avec 2 mains...
- Jeu du godet (compléments)
- Greli-Grelo : la recomposition , addition « combien j'en ai dans mon chapeau » : la somme des billes de chacune des deux mains (y ajouter l'aide à la construction de l'image mentale par la vision d'autrui)
- cartes éclairs, cartons flash avec des quantités organisées (voir site Retz ou jeu F Boule « Combien ? »)
- le furet (de 1 en 1, à l'envers, ... de 9 en 9...)
- jeu des intrus, en justifiant ses propositions
- la boîte transparente puis opaque
- Portrait des nombres
- « tout sur.. » : les E doivent donner des informations différentes de celles déjà données

Voir bibliographie :

Et des exemples de sites : « gomaths » (<http://www.gomaths.ch/>),
«AbulÉdu » (<http://www.abuledu.org/>)